101	Groupes monogènes, groupes cycliques, exemples.	Tout groupe cyclique d'ordre n∈ℕ* (resp. monogène) est isomorphe à ℤ/nℤ (resp.ℤ).	Reversat, De Biasi, Gourdon Alg+An. Lanzmann.

I. Groupes monogènes (Reversat p.19-20).

A. Définitions et caractérisations.

Def.1: $(G,.)$ est **monogène** ssi :
$\exists x\in G$ tq. $G=\langle x\rangle=\{x^k / k\in\mathbb{Z}\}$
$(G,.)$ est **cyclique** ssi il est monogène fini.(1)

Exemples:
→ $(\mathbb{Z},+)=\langle 1\rangle$ est monogène.
→Pour n∈ℕ*, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)=\langle\bar{1}\rangle$ est cyclique d'ordre n.
→Notant $U_n=\{z\in\mathbb{C}^*/z^n=1\}$, on a $(U_n,\times) < (\mathbb{C}^*,\times)$ cycl. d'ordre n, et c'est le seul sg. d'ordre n de $(\mathbb{C}^*,\times)$.

Prop.1: Tout groupe monogène est abélien. (2)

Def.2: L'élément **a**∈G est dit **d'ordre p**∈ℕ* ssi le ss-gpe <a> est d'ordre fini p.

Prop.2: p est le plus petit entier naturel tel que $a^p=e$, et $\langle a\rangle=\{e;a;...;a^{p-1}\}$.

Th1: (**Lagrange**) Dans un groupe G quelconque, si a∈G est d'ordre fini, alors $o(a)\,|\,o(G)$.

Prop.3: Tout groupe cyclique d'ordre n∈ℕ* est isomorphe à ℤ/nℤ.
Tout groupe monogène infini est isomorphe à ℤ.

Prop.4: L'image par un morphisme de groupe d'un groupe monogène (resp. cyclique) est monogène (resp. cyclique).

B. Générateurs.

Th.2: Soient (G, .) cyclique d'ordre n et a un générateur de G (i.e. G=<a>). G contient $\varphi(n)$ éléments générateurs, qui sont de la forme a^k, avec $k\wedge n=1$ et $k\in[\![1;n-1]\!]$. (a)

Prop.5: Si G est **d'ordre un nombre premier**, alors G est **cyclique** engendré par tout élément différent de l'élément neutre.

Exemple: Les générateurs de $(U_n,\times)$ sont les $\omega_k=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k\wedge n=1$; ce sont les racines $n^{\text{ièmes}}$ primitives de l'unité.(b)

Prop.6: Soit $G=\langle a\rangle$ un groupe monogène infini, les seuls générateurs de G sont a et a^{-1}.

II. Exemples de groupes monogènes ou cycliques.

A. Sous-groupes. (Reversat/Lanzmann)

Prop.7: Tout sous-groupe d'un groupe monogène (resp. cyclique) est monogène (resp. cyclique). (c)

Prop.8: Si G monogène et p est un diviseur de n=o(G), alors G contient un et un seul sg. d'ordre p. Donc le nombre de sg de G est égal au nombre de diviseurs de n. (d)

Exemple 1:
ℤ/6ℤ a 4 sg distincts:
d'ordre 6 → ℤ/6ℤ
d'ordre 1 → $\langle\bar{0}\rangle$
d'ordre 2 engendré par $\bar{3}$ → $\langle\bar{3}\rangle=\{\bar{0};\bar{3}\}$
d'ordre 3 engendré par $\bar{2}$ → $\langle\bar{2}\rangle=\{\bar{0};\bar{2};\bar{4}\}$

Exemple 2: Considérons $(U_n,\times)$. Si d|n, $U_d < U_n$, et pour chaque diviseur d de n, ∃! sg d'ordre d de U_n, c'est $\left\langle e^{\frac{2i\pi}{d}}\right\rangle$.

B. Produit de deux groupes. (Gourdon p.23)

Prop.9: Soient G_1 et G_2 deux groupes cycliques d'ordres respectifs m et n. Alors **$G_1\times G_2$ est cyclique** ssi $m\wedge n=1$.

C. Exercices. (Gourdon p.39)

Ex.1: Si G est un groupe fini tq.
∀d≥1, x^d =e a au plus d solutions dans G
Alors G est cyclique.

Ex.2: Si K est un corps commutatif et G sg fini du groupe multiplicatif (K*,×), alors G est cyclique.

Ex.3: (Gourdon ANALYSE p.199) Sous-groupes additifs de $(\mathbb{R},+)$. Soit Λ<(ℝ,+), Λ≠{0}. Alors:
ou bien ∃m>0 tq. Λ=mℤ
ou bien Λ est dense dans ℝ.

III. Notes.

(1)Groupe ou sg fini: comportant un nbre fini d'éléments.
(2)Commutatif=Abélien, il n'y a **aucune** différence.
(a)Reversat p.20 ou Gourdon p.19.
(b)Debiasi p.80

(c)Reversat p.20
(d)Lanzmann